

# 联合增益递推的 Duffing 系统弱信号检测算法

芮国胜<sup>1</sup>, 张 洋<sup>1,2</sup>, 苗 俊<sup>1,2</sup>, 张 嵩<sup>1,2</sup>, 史 特<sup>1,2</sup>

(1. 海军航空工程学院电子信息工程系, 山东烟台 264001; 2. 海军航空工程学院研究生管理大队, 山东烟台 264001)

**摘 要:** 相变判别在 Duffing 振子弱信号检测中具有至关重要的作用, 传统的判别算法复杂度高而精度低, 限制了 Duffing 振子的应用, 因而需要寻求更优的判别算法. 本文通过欧拉方程建立正弦策动力 Duffing 振子的状态方程, 并对 Duffing 系统进行滤波估计, 推导出系统扩展卡尔曼增益的递推表达形式, 以此为据提出了一种联合卡尔曼增益递推方程判别 Duffing 系统状态的新方法, 同时根据增益随信号幅度变化的规律, 提出了运用联合系统对弱信号进行定性和定量检测的方法, 仿真验证表明, 该方法可有效地对弱信号进行检测, 相比传统 Lyapunov 指数判别法, 运算耗时降低了两个数量级, 且运算精度得到了显著提高.

**关键词:** Duffing 振子; 扩展卡尔曼滤波; 正弦摄动力; 相变判别

**中图分类号:** TN911.23      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2012) 06-1269-05

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>

**DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2012.06.034

## A Weak Signal Detection Method by Duffing System with the Gain

RUI Guo-sheng<sup>1</sup>, ZHANG Yang<sup>1,2</sup>, MIAO Jun<sup>1,2</sup>, ZHANG Song<sup>1,2</sup>, SHI Te<sup>1,2</sup>

(1. *Electronic Information Engineering Department of Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China;*

2. *Graduate Students' Brigade of Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai, Shandong 264001, China*)

**Abstract:** The identification of phase transition plays an important part on the detection of the weak signal by Duffing oscillator. Traditional identification algorithm has the complicated calculation and the low precision, which confine the applications of Duffing oscillator, so it's necessary to seek a better identification algorithm. In the paper the state equation of Duffing using sine function as the driving force is set up by the Euler-maruyama algorithm. In the filtering process of Duffing with extended Kalman filter, the recursion expression of Kalman gain is derivated, then a new method associated with the gain to identify the phase transition of Duffing is offered, and meanwhile, according to the transition of Kalman gain with the amplitude of signals, the method of weak-signal detection with the joint system is offered. The simulation shows that the method can effectively detect the weak signals. Compared with the Lyapunov identification method, the simulation time of the new algorithm falls two orders of magnitude, and the precision of the calculation improves remarkably.

**Key words:** Duffing oscillator; extended Kalman filter; sine perturbation; identification of phase transition

## 1 引言

混沌是现代非线性科学中广为研究的领域之一, 而 Duffing 系统作为混沌学研究中经典的非线性系统, 因其在弱信号检测<sup>[1]</sup>方面的优越性, 得到了电子、通信、机械、电力等各个领域的广泛应用. Duffing 振子微弱信号检测的物理机理来源于对混沌的控制<sup>[2]</sup>, 将待测弱信号作为混沌系统的一种周期扰动引入系统, 即使噪声很强烈, 也会使系统发生本质的相变, 此时可通过辨识系统状态转变作为待测信号被检测出来的依据. 因此, 相变判别是系统检测的核心和重点.

目前科研工作者针对 Duffing 系统的状态判别进行

了大量研究, 其中, 文献[3]中采用相平面迹法作为系统相变的判据, 但其易受仿真时间等多种因素影响, 效率较低; 文献[4]中采用双阵子差分的形式对相平面迹法进行了改进, 却仍然没有摆脱图像观察法的范畴. 一些定量检测的方法, 如李雅普诺夫特性指数 (Lyapunov Characteristic Exponents) 法<sup>[5]</sup>、Kolmogorov 熵法、分维数 (Fractal Dimension) 法<sup>[6]</sup>等解析方法, 这些方法的特点是量化判定混沌现象, 但判别时需要复杂的计算, 实时性较差, 不符合工程应用的要求, 这极大的限制了 Duffing 振子在工程领域的应用, 因此迫切需要寻求可以快速判别 Duffing 振子相变的方法.

本文在分析 Duffing 非线性动力学系统运动特性的

基础上,运用 Euler-Maruyama(EM)算法<sup>[7]</sup>建立系统的递推形式;并提出了一种基于扩展卡尔曼滤波(Extended Kalman Filter, EKF)<sup>[8]</sup>的 Duffing 振子弱信号检测方法,该方法通过对正弦信号 Duffing 系统的滤波过程中的卡尔曼增益变化,在 Duffing 系统方程中加入卡尔曼增益递推方程,用来对系统的周期相变进行判别,经过仿真验证,该方法不仅可以实现对 Duffing 系统相变的定性判别,而且通过设定阈值,可以对加入 Duffing 系统周期摄动力进行准确的定量判别。

## 2 Duffing 系统模型分析

Duffing 方程可用式(1)表示:

$$\ddot{x} + k\dot{x} - ax + bx^3 = \gamma \cos(\omega t) \quad (1)$$

引入中间变量  $y = \dot{x}$ , 可以将式(1)转换为式(2),

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -ky + ax - bx^3 + \gamma \cos(\omega t) \end{cases} \quad (2)$$

通过对式(2)计算雅可比矩阵,从而对系统线性化得到式(3)。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a - bx^2 & -k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

非线性滤波为一递推贝叶斯过程,需要将微分方程转化为差分形式,因此借助 EM 方程, Duffing 振子可以由下面的状态方程形式(4)表示,即:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{x}(n) + \omega \cdot h \cdot \mathbf{y}(n) + \mathbf{v}(n) \\ \mathbf{y}(n+1) = (1 - 0.5 \cdot \omega \cdot h) \cdot \mathbf{y}(n) + \omega \cdot h \cdot [\mathbf{x}(n) - \mathbf{x}^3(n)] \\ \quad + \gamma \cdot \omega \cdot h \cdot \cos[\omega \cdot (h \cdot n)] \end{cases} \quad (4)$$

这里令  $a = b = 1, k = 0.5$ , 这样就得到了系统的状态方程,这里的  $h$  为仿真步长,  $h$  应选取尽量小的值,以保证更加精确的逼近 Duffing 系统模型,  $v(n)$  表示均值为 0, 方差为  $Q$  的高斯白噪声。

根据式(3)求得系统状态的雅可比形式为式(5):

$$\begin{cases} \mathbf{F}_x(n) = \mathbf{y}(n) \\ \mathbf{F}_y(n) = (1 - \mathbf{x}^2(n)) \cdot \mathbf{x}(n) - 0.5 \cdot \mathbf{y}(n) \end{cases} \quad (5)$$

即: Duffing 系统的雅可比方程是容易获得的,因此可运用 EKF 的滤波方式对系统进行递推估计,容易实现且具有较低的复杂度。

## 3 Duffing 系统滤波过程及增益推导

### 3.1 状态预测

#### 3.1.1 状态的一步预测

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{Y}}(k+1|k) \end{pmatrix} = \mathbf{f}_{X,Y} \left( \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}}(k|k) \\ \hat{\mathbf{Y}}(k|k) \end{pmatrix} \right) \quad (6)$$

将  $\hat{\mathbf{X}}(k|k), \hat{\mathbf{Y}}(k|k)$  代入式(5)计算得到系统的雅可比矩阵  $\mathbf{F}_X(k), \mathbf{F}_Y(k)$ 。

#### 3.1.2 协方差的一步预测

对于 EKF 的状态线性化,根据产生的预测估计的误差,可以得到预测协方差为:

$$\mathbf{P}_X(k+1|k) = \mathbf{F}_X(k) \mathbf{P}_X(k|k) \mathbf{F}_X^T(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (7)$$

同理得到:

$$\mathbf{P}_Y(k+1|k) = \mathbf{F}_Y(k) \mathbf{P}_Y(k|k) \mathbf{F}_Y^T(k) + \mathbf{Q}(k) \quad (8)$$

### 3.2 量测更新

#### 3.2.1 量测预测值

由  $k$  时刻的量测  $Z(k)$ , 对  $k+1$  时刻状态  $\mathbf{X}(k+1), \mathbf{Y}(k+1)$  进行估计,表示为  $\hat{\mathbf{X}}^T(k+1|k), \hat{\mathbf{Y}}^T(k+1|k)$ , 有:

$$\hat{\mathbf{Z}}(k+1) = \mathbf{h}(k+1, \hat{\mathbf{X}}^T(k+1|k), \hat{\mathbf{Y}}^T(k+1|k)) \quad (9)$$

量测协方差估计为:

$$\mathbf{S}_X(k+1) = \mathbf{H}_X(k) \mathbf{P}_X(k+1|k) \mathbf{H}_X^T(k) + \mathbf{R}(k) \quad (10)$$

$$\mathbf{S}_Y(k+1) = \mathbf{H}_Y(k) \mathbf{P}_Y(k+1|k) \mathbf{H}_Y^T(k) + \mathbf{R}(k) \quad (11)$$

其中的  $\mathbf{H}_X, \mathbf{H}_Y$  为系统量测的雅可比,因检测的实时性为本文讨论的主要问题,对于系统的递推估计侧重于状态方程的递推,因此,算法的量测方程可以假设为系统当前状态加高斯白噪声的线性形式,  $\mathbf{H}_X, \mathbf{H}_Y$  为定值。

#### 3.2.2 计算卡尔曼增益

可以通过卡尔曼增益对系统状态方程和量测方程进行修正,具体的表达式如下式

$$\mathbf{K}_X = \mathbf{P}_X(k+1|k) \mathbf{H}_X^T(k+1) \mathbf{S}_X^{-1}(k+1) \quad (12)$$

同理得到:

$$\mathbf{K}_Y = \mathbf{P}_Y(k+1|k) \mathbf{H}_Y^T(k+1) \mathbf{S}_Y^{-1}(k+1) \quad (13)$$

其中  $\mathbf{K}_X, \mathbf{K}_Y$  为最佳增益矩阵。此时,可使更新协方差  $\mathbf{P}_X(k+1|k+1), \mathbf{P}_Y(k+1|k+1)$  达到最小。

#### 3.2.3 状态更新方程

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{K}_X [\mathbf{z}_X(k+1) - \hat{\mathbf{z}}_X(k+1|k)] \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{Y}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{Y}}(k+1|k) + \mathbf{K}_Y [\mathbf{z}_Y(k+1) - \hat{\mathbf{z}}_Y(k+1|k)] \quad (15)$$

#### 3.2.4 协方差更新方程

$$\mathbf{P}_X(k+1|k+1) = \mathbf{P}_X(k+1|k) - \mathbf{K}_X \mathbf{S}_X(k+1) \mathbf{K}_X^T \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_Y(k+1|k+1) = \mathbf{P}_Y(k+1|k) - \mathbf{K}_Y \mathbf{S}_Y(k+1) \mathbf{K}_Y^T \quad (17)$$

### 3.3 递推卡尔曼增益形式推导

下面对 Duffing 振子的卡尔曼增益的具体表达式进行推导,

由式(4)、(5)、(7)、(10)、(12)、(16)可以得到:

$$\mathbf{P}_X(k|k) = \mathbf{K}_X(k) \cdot \mathbf{R}(k) \quad (18)$$

其中,式(12)中,为简化运算,令  $\mathbf{H}_X^T(k) = 1$ , 所以:

$$\mathbf{K}_X(k+1) = \mathbf{P}_X(k+1|k) \mathbf{S}_X^{-1}(k+1) \quad (19)$$

由式(5)和式(7)可以得到:

$$P_X(k+1|k) = Y^2(k)P_X(k|k) + Q(k) \quad (20)$$

同样,由式(5)、(7)、(10)可以得到:

$$S_X(k+1) = Y^2(k)P_X(k|k) + Q(k) + R(k) \quad (21)$$

联立式(18)、(20)、(21),可以得到式(19)的递推表达,如式(22):

$$K_X(k+1) = \frac{Y^2(k)K_X(k) \cdot R(k) + Q(k)}{Y^2(k)K_X(k) \cdot R(k) + Q(k) + R(k)} \quad (22)$$

同理也可以得到关于  $K_Y$  的递推方程.

联立式(4)和式(22),即可得到关于系统  $X$  方向位置、 $Y$  方向位置以及相应的  $X$  方向卡尔曼增益变化规律.

## 4 仿真实验

### 4.1 仿真环境

仿真参数取值:系统量测的雅可比为  $H_X = H_Y = 1$ ,仿真的抽样频率  $f = 1\text{kHz}$ ,即假设的仿真步长为  $h = \frac{1}{f} = \frac{1}{1000}$ ,循环采样数为  $10^5$ ,为验证不同幅度的摄动对振子状态的影响,系统初始周期策动力设为 0.81,系统的周期策动力频率为 50Hz,即  $\omega = 100\pi \text{ rad/s}$  仿真的系统噪声  $V(k)$  和量测噪声  $W(k)$  设定为等值的零均值高斯白噪声,检测信噪比为  $-40\text{dB} \sim 10\text{dB}$ ,系统的初始化参数设置为初始位置  $[x_0, y_0] = [0.1, 0.1]$ ,初始系统协方差为  $P_{0x} = P_{0y} = 1$ .

### 4.2 仿真结果

#### 4.2.1 新检测方法的图形分析

定性的仿真结果如下图 1 ~ 图 4 所示,其中,图 1 为加入正弦周期摄动力  $\delta = 0.01$  时的 Duffing 系统的  $X$  方向时域波形图及关于  $X$ 、 $Y$  方向的系统相图,由图可以看出,当  $\delta = 0.01$  时,系统处于混沌状态,此时总的系统策动力大小变为  $\gamma' = \gamma + \delta = 0.82$ .

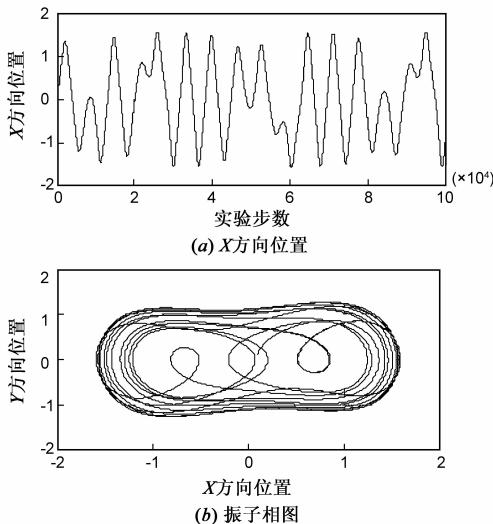


图1 摄动力 $\delta=0.01$ 时的Duffing系统时域图

根据式(4)和式(22)的递推,令

$$\gamma = \gamma' = \gamma_{\text{初始}} + \delta_{\text{摄动}}$$

经过仿真实验,可以得到如图 2 所示的,当周期摄动力  $\delta = 0.01$  时,关于系统卡尔曼增益的仿真图形.另外,为了提取仿真实验中卡尔曼增益的包络,本文采用 db4 小波基函数做 12 层小波分解,并提取其中的低频分解系数,如图所示,从图中可以看出,在加入周期摄动力  $\delta = 0.01$  时,系统卡尔曼增益的包络呈现一种包络起伏的趋势.

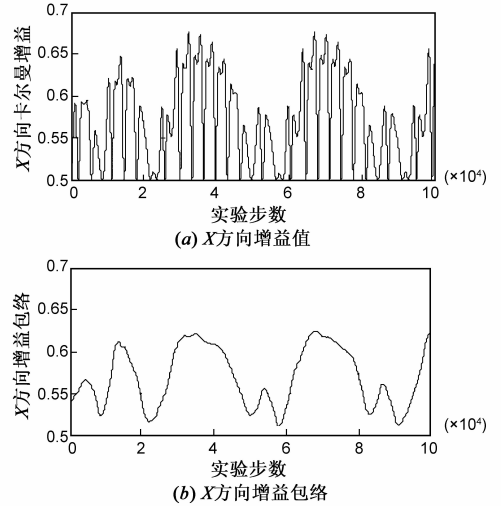


图2 摄动力 $\delta=0.01$ 时X方向增益及增益包络

随着加入的周期摄动力的增大,系统逐渐向大尺度周期态转变,当  $\delta = 0.02$  时,系统相图呈现大尺度周期态,此时总的系统策动力大小变为  $\gamma' = \gamma + \delta = 0.83$ ,如图 3 所示,为加入摄动力  $\delta = 0.02$  时的 Duffing 系统的  $X$  方向时域波形图,同时,仿真也说明了使系统发生周期相变的临界摄动力位于  $0.01 \sim 0.02$  之间,也即总的策动力超过  $0.82 \sim 0.83$  之间的某个阈值时,系统发生周期相变.

同样,可以得到周期摄动力  $\delta = 0.02$ ,总策动力为 0.83 时的系统卡尔曼增益及其包络的仿真图形,如图 4 所示,系统的卡尔曼增益由混沌态时的包络起伏逐渐转变到包络基本稳定的状态.

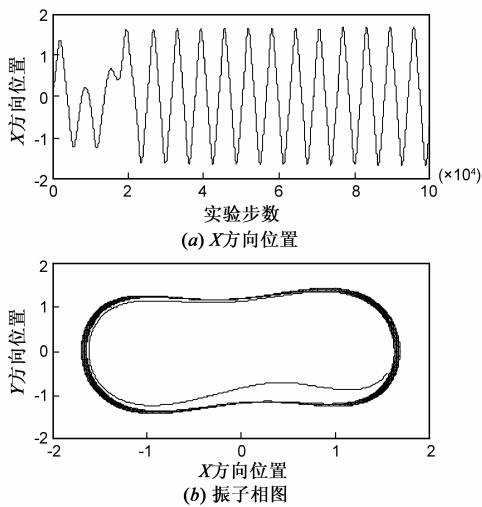
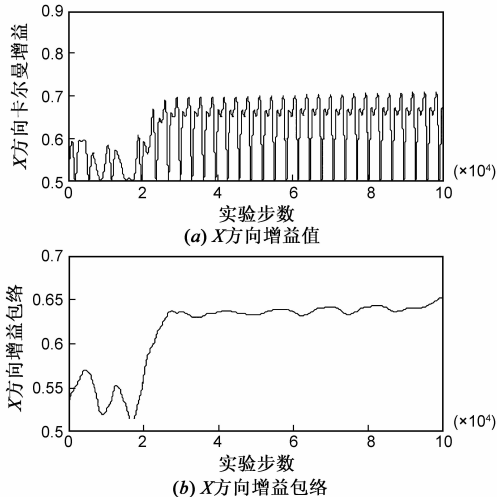
#### 4.2.2 新检测方法的定量判别

由对联合系统的图形分析可以看出,Duffing 系统在由混沌态向大尺度周期态转变的过程中,卡尔曼增益的包络发生了明显的改变,同时,针对增益的量态变化,提出了卡尔曼增益均值进行 Duffing 系统化检测的方法,增益均值计算如式(23),

$$\bar{K}_X = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N K_X(i) \right| \quad (23)$$

经实验发现:

当  $\delta = 0.01$  时,  $\gamma' = \gamma + \delta = 0.82$ ,此时 Duffing 系统

图3 摄动力 $\delta=0.02$ 时的Duffing系统时域图图4 摄动力 $\delta=0.02$ 时X方向增益及增益包络

处于混沌态,实验得到整个 Duffing 系统的卡尔曼增益均值计算为 0.569548027631527。

当  $\delta = 0.02$  时,  $\gamma' = \gamma + \delta = 0.83$ , 此时 Duffing 系统处于大尺度周期态,实验得到整个 Duffing 系统的卡尔曼增益均值为 0.615909319328938。

由此可见,当 Duffing 系统的状态由混沌态跃变到大尺度周期态,系统的卡尔曼增益均值由 0.5695 变化到 0.6159,由此可将 0.5695 ~ 0.6159 之间的数值作为系统临界的相变判别阈值,具体需根据待判别的弱信号频率不同进行设定(经仿真验证,信号频率对相变判别阈值选取影响很小,可视具体情况进行微调)。

#### 4.2.3 电力谐波弱信号检测仿真

电力系统中谐波检测问题日益突出,准确检测谐波参数具有重要意义,下面将运用新提出的 Duffing 系统弱信号检测技术对谐波信号进行检测,并与传统的相变判别法进行比较。

传统意义上对 Duffing 系统的定量状态判别, Lyapunov 指数法是其中最为经典、应用广泛的一种,它通过

计算系统的 Lyapunov 指数来判别系统的状态变化,当最大 Lyapunov 指数为正时,系统处于混沌状态,当最大 Lyapunov 指数为负时,系统处于周期稳定态。

将本文的检测算法与传统 Lyapunov 指数检测法进行比较,做了如下的仿真实验。

假设待测信号为  $x(t) = A\cos(\omega t) + n(t)$  的电力系统谐波信号,其中  $n(t)$  为高斯白噪声,  $A$  为待测谐波信号的幅度范围,实验采用幅度在  $[0.01, 0.02]$  区间的  $10^4$  个满足均匀分布的随机数,  $\omega$  为待测谐波信号的角频率,这里假定  $\omega = 100\pi$  rad/s,根据前面的分析,系统临界策动力位于 0.82 ~ 0.83 之间,为进一步提高检测精度,系统临界策动力重设为 0.82。

在 -40dB ~ 10dB 不同信噪比条件下各进行 100 次蒙特卡罗仿真实验并取系统检测平均差错率,卡尔曼增益检测阈值设定为 0.61,分别从检测精度和运算时间上对两种算法进行比较,得到的结果如图 5 所示。

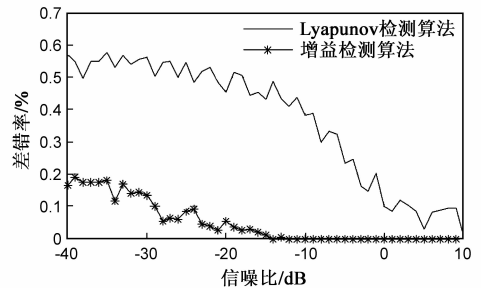


图5 算法差错率比较

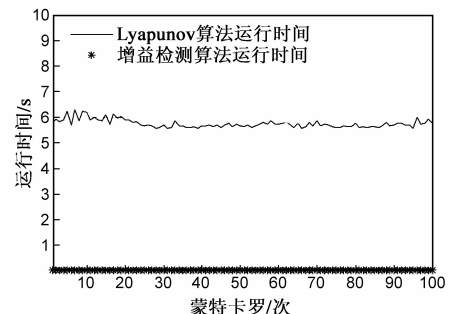


图6 运行时间比较

由图可以看出,新算法在判别精确度上相比传统的 Lyapunov 算法有了较大的改进,当信噪比等于 -20dB 时, Lyapunov 算法差错率为 0.48%,而联合增益判别法差错率则只有 0.02% ;

在运算复杂度方面,对两种算法做 100 次蒙特卡洛仿真的运算时间比较,如图 6 所示, Lyapunov 算法的运行时间要远远超过增益检测算法,对 100 次蒙特卡洛检测时间取平均,新算法耗时约为 0.013s, Lyapunov 算法约为 5.795s,新算法耗时比 Lyapunov 算法低 2 个数量级。

## 5 结论

随着 Duffing 系统弱信号检测技术的广泛应用,研

究快速的系统状态判别方法具有重要的意义,如在码元传输速率很高的通信领域,借助快速的 Duffing 系统弱信号检测技术,可以实现极低信噪比条件下的高码率通信。本文运用扩展卡尔曼滤波方法对 Duffing 振子的非线性递推过程进行了分析研究,推导了 Duffing 系统非线性滤波过程中的卡尔曼增益递推表达形式,并将增益递推方程与 Duffing 振子的系统状态模型结合,提出了一种新的弱信号检测方法,通过对新检测系统的定性及定量分析,证明了新算法在区分周期相变时的有效性,最后运用新检测方法对电力谐波弱信号进行检测,与传统 Lyapunov 指数检测法相比,新算法在保证准确率的前提下可以更快地对弱信号进行检测。

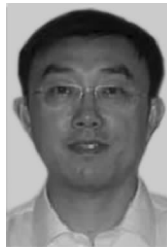
### 参考文献

- [1] 何文涛,徐建华,叶甜春. 互相关干扰下的 Gness 弱信号检测算法[J]. 电子学报, 2011, 39(2): 471 - 475.  
He Wen-tao, Xu Jian-hua, Ye Tian-chun. Detection of Gness weak signal in cross correlation interference [J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(2): 471 - 475. (in Chinese)
- [2] 蔡新国,罗锡璋,丘水生,刘颖东. 基于相位控制的混沌同步[J]. 电子学报, 2003, 31(8): 1213 - 1216.  
Cai Xin-guo, Luo Xi-zhang, Qiu Shui-sheng, LIU Ying-dong. Chaotic synchronization based on phase control [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(8): 1213 - 1216. (in Chinese)
- [3] Hu N Q, Wen X S. The application of Duffing oscillator in characteristic signal detection of early fault [J]. Journal of Sound and Vibration, 2003, 68(5): 917 - 931.
- [4] 赵华,尹成群,尚秋峰,等. 双振子差分混沌特性判别方法[J]. 中国电机工程学报, 2006, 26(23): 32 - 35.  
Zhao-hua, Yin Cheng-qun, Shang Qiu-feng, et al. Two oscillator difference chaotic identification method [J]. Proceedings of the Chinese Society for Electrical Engineering, 2006, 26(23): 32 - 35. (in Chinese)
- [5] 杨红英,叶昊,王桂增,等. Duffing 振子的 Lyapunov 指数与 Floquet 指数研究[J]. 仪器仪表学报, 2008, 29(5): 927 - 932.  
Yang Hong-ying, Ye-hao, Wang Gui-zeng, et al. Study on Lyapunov exponent and Floquet exponent of Duffing oscillator [J].

Chinese Journal of Scientific Instrument, 2008, 29(5): 927 - 932. (in Chinese)

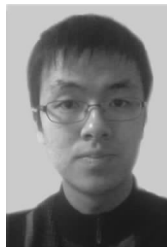
- [6] 刘东林,帅典勋. 网络流量模型的非线性特征量的提取及分析[J]. 电子学报, 2003, 31(12): 1866 - 1869.  
Liu Dong-lin, Shuai Dian-xun. Analysis on network flow time sequences and extraction of nonlinear characteristic quantities [J]. Acta Electronica Sinica, 2003, 31(12): 1866 - 1869. (in Chinese)
- [7] 田增锋,魏跃春,胡良剑. 随机微分方程 Euler 法的均方稳定性和指数稳定性[J]. 自然杂志, 2002, 24(6): 369 - 370.  
Tian Zeng-feng, Wei Yue-chun, Hu Liang-jian. Mean square stability and exponential stability of Euler scheme for solving stochastic differential equations [J]. Nature Magazine, 2002, 24(6): 369 - 370. (in Chinese)
- [8] 荣思远,穆荣军,崔乃刚. EKF 容错滤波方法在磁测自主导航中的应用研究[J]. 电子学报, 2006, 34(12): 2268 - 2271.  
Rong Si-yuan, Mu Rong-jun, Cui Naigang. Research on the fault tolerant filter applied on using magnetic magnetometer autonomous navigation [J]. Acta Electronica Sinica, 2006, 34(12): 2268 - 2271. (in Chinese)

### 作者简介



芮国胜 男, 1968 年生于山东烟台, 博士, 海军航空工程学院教授、博士生导师, 主要研究方向为现代通信系统、自适应滤波算法、小波理论及其应用。

E-mail: ruiqs@vip.sina.com



张洋 男, 1983 年生于山东烟台, 海军航空工程学院博士研究生, 主要研究方向为混沌与非线性滤波技术等。

E-mail: zhyang\_111@163.com